世界数学奥林匹克解题---数论卷

# 第一章 整除

1.1 证明对任意整数n，n^6 + 2n^5-n^2-2n能被120整除。

1.2 证明对任意的正整数n，数(n^3-n)\*(5^(8n+4)+3^(4n+2))能被3804整除。

1.3 证明1\*3\*5\*…\*1983\*1985+2\*4\*6\*…\*1984\*1986能被1987整除。

1.4 证明和数1\*2\*3\*…\*2000\*2001+2002\*2003\*…\*4001\*4002能被4003整除。

1.5 从自然数数列1,2,3,4，…中依次划去3的倍数和4的倍数，但是其中凡是5的倍数均保留(例如15,20都不划去)，划完以后，再将剩下的数据依次写成数列：A1=1，A2=2，A3=5，A4=7，…求A1988的值。（提示：先计算得到前100个中没有被划去的占总数的比例，然后计算1988个保留数对应的总数是多少，之后再推算出A1988的数值）

1.6 自然数a，b，c，d都可以被自然数ab-cd整除，证明ab-cd=1。

1.7 （1）x，y均为整数，若5|（x+9y），求证5|（8x+7y）。

（2）x，y，z均为整数，若11|（7x+2y-5z）,求证11|(3x-7y+12z)。

1.8 证明对于同样的整数x和y，2x+3y和9x+5y能同时被17整除。

1.9 是否存在两个不等于0的整数a和b，其中之一可被它们的和整除，另一个可被它们的差整除？

1.10 k与n为正整数，证明(n^4-1)(n^3-n^2+n-1)^k+(n+1)n^(4k-1)能被n^5+1整除。

1.11 证明对每个整数x，x^2+5x+16不能被169整除。

1.12 一串数1,4,7,10，…，697,700的规律是：第一个数是1，以后的每个数等于它前面的一个数加3，直到700为止。将所有这些数相乘，试求所得数的尾部零的个数。（例如12003000的尾部零的个数是3）。

1.13 将自然数N接写在每一个自然数的右面（例如，将2接写在35的右面得352），如果得到的新数都能被N整除，那么N称为魔术数，在小于130的自然数中，魔术数的个数是多少？

1.14 若干个整数的和能被6整除，证明这些数的立方和也能被6整除。

1.15 基里亚国和达里亚国的货币单位分别叫基涅尔和达涅尔。在基里亚国中，1基涅尔可以兑换10达涅尔，在达里亚国中，1达涅尔可以兑换10基涅尔，一魔术师手中原来有1达涅尔的钱，他可以自由往来于这两个国家，并可随意在两国兑换货币。证明任何时候他手中的两种钱的数目都不相等。

1.16 设a1,a2,…an是自然数，它们的和能被30整除，证明a1^5+a2^5+…+an^5能被30整除。

1.17 在小于10000的奇自然数n中，是使由n^9的后4个数码组成的数大于n的奇数n多，还是使由n^9的后4个数码组成的数小于n的奇数n多？

1.18 证明如果u和v是整数 ，u^2+uv+v^2能被9整除，那么u和v 都能被3整除。

1.19 假设a，b，c，d是整数，且数ac，bc+ad，bd都能被某整数u整除，证明数bc和ad也能被u整除。

1.20 假设a，b，c，d是方程组ax+by=m,cx+dy=n。对所有的整数m，n都有整数解的整数。证明这时有ad-bc=±1。